УДК 622.1:004.9 DOI: 10.21440/0536-1028-2026-5-89-99

Динамическая трехмерная модель подземного горного пространства

Коновалов О. Л.[1]*, Краснопрошин В. В.[1]
[1] Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь
e-mail: konovalovol@bsu.by

Реферат

Введение. *Трехмерные модели подземного пространства являются основой цифровых двойников горнодобывающих предприятий и должны быть динамичными – точно отражать текущее состояние физического прототипа в каждый момент времени.*

Цель работы *– создать трехмерную модель подземных горных работ и технологию ее построения, обеспечивающую высокую оперативность и геометрическую точность при минимальных трудозатратах.*

Методика проведения исследований. *Предложена гибридная геометрическая модель подземного пространства, сочетающая положительные качества двух популярных подходов: точность sweep-представления и простоту loft-представления. Геометрия выработки декомпозируется на набор loft-тел, соответствующих отдельным проходкам комбайна. Предложен алгоритм декомпозиции произвольного вертикального сечения на основе метода градиентного спуска с робастной функцией потерь, позволяющий в том числе восстанавливать неизвестные параметры траекторий движения комбайна по вертикальным сечениям выработки.*

Результаты. *Экспериментальная проверка на данных подземного лазерного сканирования калийного месторождения показала точность аппроксимации контура выработки 0,05 м и отклонение поверхности 0,07 м, при этом для сходимости алгоритма градиентного спуска достаточно 10–30 итераций. Эксперименты показали, что погрешность расчета объема выработки при использовании предложенной модели составляет около 5 %.*

Выводы. *Разработаны трехмерная модель подземных горных работ и технология ее построения, обеспечивающие высокую геометрическую точность при минимальных трудозатратах на создание и сопровождение. Предложенная модель имеет компактное представление и позволяет решать большинство задач цифровых двойников подземного горного пространства: размещение оборудования, расчет вентиляции, построение транспортных путей и т. д.*

Ключевые слова: *цифровой двойник; подземная разработка; 3D-моделирование; sweep-поверхность; алгоритм contour fitting; робастная оценка; лазерное сканирование; пластовые месторождения.*

Введение и актуальность. Цифровые двойники горнодобывающих предприятий представляют собой новую парадигму управления шахтами, предполагающую мониторинг производственных процессов в реальном времени, предиктивное обслуживание оборудования, моделирование вентиляционных сетей и проактивную оценку рисков безопасности [1–6]. Актуальность технологии цифровых двойников обусловлена возрастающей сложностью подземных горных операций, необходимостью снижения эксплуатационных затрат при соблюдении стандартов безопасности и растущим внедрением технологий Индустрии 4.0 в горнодобывающем секторе. Трехмерные модели подземного пространства являются основой

цифровых двойников горнодобывающих предприятий [1]. Фундаментальное требование к 3D-модели цифрового двойника заключается в том, что она должна быть динамичной – в каждый момент времени (с заданным временным интервалом) представлять собой точное отражение актуального состояния своего физического прототипа [1, 7–11].

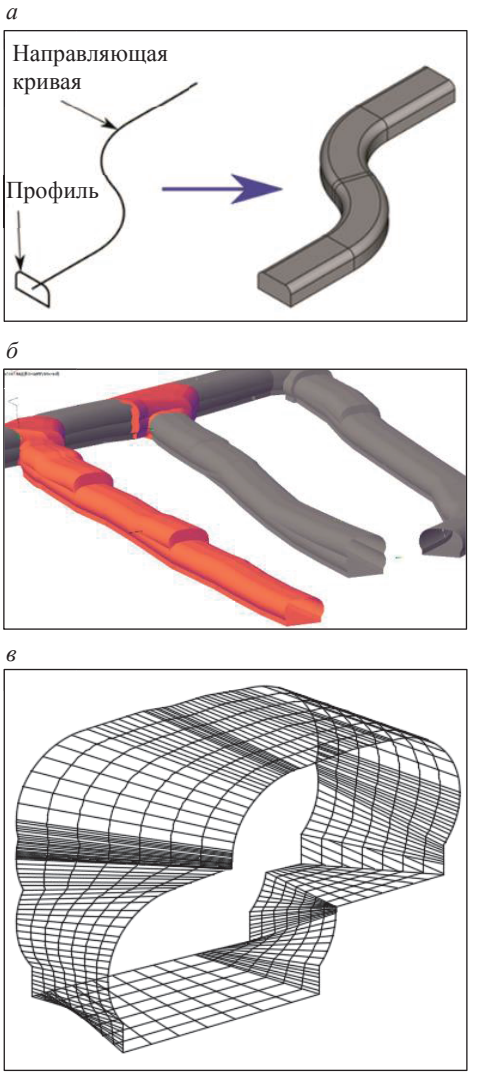

Рисунок 1. Геометрическое представление подземной выработки: *а* – sweep-тело; *б* – реальная выработка; *в* – loft-тело (ПО AutoCad)

Figure 1. Geometric representation of an underground mine working: *а* – sweep body; *б* – actual mine working; *в* – loft body (software AutoCAD)

Использование для создания и актуализации такой модели стандартного CAD-инструментария не представляется реальным, так как требует большого объема ручных операций. Для реального внедрения 3D-моделей необходимо упрощенное представление, которое, с одной стороны, описывало бы трехмерную геометрию подземных горных объектов с заданной точностью, а с другой стороны, по ресурсоемкости приближалось к двумерным аналогам [2, 3].

Анализ проблемы и постановка задачи. Наиболее естественным геометрическим представлением трехмерной модели подземной выработки является sweep-тело (sweep – метод построения 3D-поверхности, при котором плоский контур перемещается вдоль заданной траектории) [7–9, 12, 13], где в качестве контура используется типовой профиль горнопроходческого комплекса, а в качестве направляющей – трехмерная траектория движения комбайна при формировании выработки (рис. 1, *а*). Однако реальная горная выработка формируется, как правило, в результате выполнения нескольких проходок (рис. 1, *б*). Последовательное объединение множества трехмерных тел приводит к резкому росту количества мелких граней в местах их пересечения, поэтому процесс построения трехмерной модели на основе sweep-тел является критически ресурсоемким [13]. Альтернативный подход базируется на уходке – выработанном пространстве между двумя вертикальными сечениями [9–13]. Поверхность уходки представляется в виде loft-поверхности (loft – метод построения 3D-поверхности путем соединения нескольких поперечных сечений) [14], построенной между этими сечениями.

Основным достоинством loft-представления является то, что тела, построенные для смежных вертикальных сечений, не пересекаются. Это упрощает расчет

объемов, обновление модели, размещение оборудования, построение и анализ транспортных и вентиляционных сетей. Несмотря на указанное преимущество, loft-представление не получило широкого применения, так как построение loft-поверхности на основе двух концевых сечений (имеющих различное параметрическое представление) может значительно исказить форму выработки (рис. 1, *в*).

Предлагается гибридное геометрическое представление, сочетающее достоинства обоих подходов. Тело уходки декомпозируется на набор loft-тел, соответствующих каждой проходке комбайна. Для этого необходимо декомпозировать оба концевых вертикальных сечения на пары сечений для каждой проходки и построить на каждой паре отдельное loft-тело.

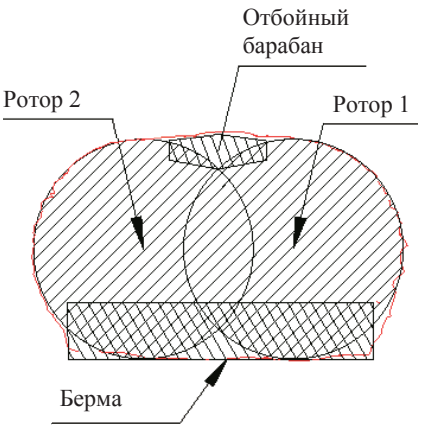

Рисунок 2. Пример профиля горнопроходческого комплекса
Figure 2. Example of a tunneling complex profile

Параметрический профиль комбайна, понятия NP-тела и NP-уходки. Базовым элементом, формирующим геометрию подземного пространства, является профиль горнопроходческого комплекса, представимый как плоская фигура F, полученная объединением набора простых выпуклых фигур, соответствующих режущим органам комбайна. Например, для комбайна «Урал-20А» профиль формируется четырьмя органами: правым и левым роторами, бермой и отбойным барабаном (рис. 2). Набор технологических параметров, задающий форму типового профиля комбайна, можно представить как некоторый вектор $\boldsymbol{p}$. Таким образом, типовой профиль F состоит из C простых выпуклых фигур, соответствующих режущим органам:

$$F(\boldsymbol{p}) = \bigcup_{i=1}^{C} f_i(\boldsymbol{p}).$$

Поверхность одиночной проходки является местом точек контура профиля $F(\boldsymbol{p})$ при его движении вдоль пространственной кривой – траектории движения комбайна. В качестве направляющих достаточно рассмотреть три типа сегментов: прямолинейный, дугу окружности и сегмент винтовой линии (гелисы). Все три типа описываются общим набором параметров $\boldsymbol{d} = (l,R,h)$, где l – длина сегмента, м; R – радиус гелисы, м; h – шаг гелисы, м. Прямолинейный сегмент и дуга – частные случаи гелисы ($R \to \infty$ и $h = 0$).

Трехмерное sweep-тело, формируемое контуром типового профиля $F(\boldsymbol{p})$, где в качестве направляющей используется сегмент типовой траектории $D(\boldsymbol{d})$, будем называть телом нормального профиля (NP-тело) и обозначать $NP(\boldsymbol{p},\boldsymbol{d})$.

Определим вертикальное сечение NP-тела как пересечение тела нормального профиля с вертикальной плоскостью сечения: $VC(\boldsymbol{p},\boldsymbol{d},P) = NP(\boldsymbol{p},\boldsymbol{d}) \cap P$, где $NP(\boldsymbol{p},\boldsymbol{d})$ – sweep-тело, образованное движением типового профиля $F(\boldsymbol{p})$ вдоль пространственной кривой $D(\boldsymbol{d})$ (траектории), а P – вертикальная плоскость в R^3. Базовым примитивом предлагаемой трехмерной модели подземного пространства является уходка – выработанное пространство (трехмерное тело), соответствующее

объему горного пространства между двумя граничными вертикальными сечениями V_0 и V_1. Таким образом, вертикальное сечение V – это плоская пространственная фигура, лежащая в вертикальной плоскости сечения P.

Дадим формальное определение понятию NP-уходки. Пусть задано множество NP-тел $G = \{NP_1, NP_2, ..., NP_M\}$, соответствующих всем проходкам, формирующим объем выработанного пространства между двумя вертикальными сечениями V_0 и V_1. Тогда NP-уходка U представляет собой трехмерное тело, полученное как пересечение объединения всех тел из G с областью, ограниченной плоскостями вертикальных сечений, т. е. $U = (NP_1 \cup NP_2 \cup ... \cup NP_M) \cap (H_0 \cap H_1)$, где H_0 и H_1 – граничные полупространства, задаваемые плоскостями P_0 и P_1 вертикальных сечений V_0 и V_1, соответственно. При этом предполагается, что полупространства H_0 и H_1 расположены таким образом, что весь объем уходки лежит внутри их пересечения $H_0 \cap H_1$.

Множество G однозначно порождает декомпозицию каждого граничного сечения V_m на набор вертикальных сечений NP-тел $V_m = VC(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{d}_1, P_m) \cup VC(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{d}_2, P_m) \cup VC(\boldsymbol{p}_M, \boldsymbol{d}_M, P_m)$, где P_m – вертикальная плоскость сечения для m-го граничного сечения.

Для каждой пары сечений $VC(\boldsymbol{p}_j, \boldsymbol{d}_j, P_0)$ и $VC(\boldsymbol{p}_j, \boldsymbol{d}_j, P_1)$ может быть построено loft-тело $LB(\boldsymbol{p}_j, \boldsymbol{d}_j)$. Объединение всех таких loft-тел назовем loft-представлением NP-уходки. Основным преимуществом loft-представления является то, что его можно построить без информации о траектории движения комбайна, достаточно иметь декомпозицию граничных сечений.

Алгоритм построения вертикального сечения NP-тела. Рассмотрим алгоритм, который строит дискретное приближение вертикального сечения $VC(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{d}, P)$ в виде полилинии. Для этого достаточно построить дискретное приближение вертикального сечения для sweep-поверхностей всех простых фигур, составляющих типовой профиль $F(\boldsymbol{p})$, а затем выполнить объединение полученных замкнутых контуров [11].

Учитывая специфику режущих органов комбайна, для этого достаточно рассмотреть построение сечений для двух винтовых поверхностей, образованных двумя типами профилей: окружностью (винтовой тор) и отрезком (открытый геликоид). Получение общего аналитического решения в виде непрерывной кривой для случая винтового тора представляет собой сложную задачу, поскольку получаемое уравнение трансцендентно по обоим параметрам поверхности [15, 16]. Покажем, что дискретное приближение решения может быть построено явно при фиксации одного из параметров sweep-поверхности.

Винтовая поверхность, образованная окружностью. Параметрическая sweep-поверхность S, образованная окружностью радиуса a, м, при движении вдоль винтовой кривой имеет вид:

$$S(t,u) = r(t) + a \cdot \vec{n}(t) \cdot \cos(u) + a \cdot \vec{b}(t) \cdot \sin(u),$$

где $r(t) = (R\cos(t), R\sin(t), h\ t)...$ – параметрическое уравнение гелисы радиуса R с шагом h; $n(t)$ и $b(t)$ – нормальный и бинормальный векторы к гелисе в точке с параметром t, соответственно; $u \in [0, 2\pi]$ – параметр контура (окружности).

Ключевой факт, используемый при построении дискретного приближения: для фиксированного $u = u^*$ проекция элемента поверхности $S(t, u^*)$ на горизонтальную плоскость представляет собой окружность радиуса

$$\rho(u^*) = \sqrt{\left(R - a \cdot \cos(u^*)\right)^2 + h^2 \cdot a^2 \cdot \sin^2(u^*) \Big/ \left(R^2 + h^2\right)}.$$

Для приближенного построения сечения строим набор концентрических окружностей для дискретного набора $\bar{u} = \{u_1, ..., u_n\} \in [0, 2\pi]$. Найдем пересечение плоской окружности, соответствующей параметру u^*, с вертикальной плоскостью сечения P, задаваемой плоским углом θ между нормалью к P и касательным вектором траектории. Пусть это будет точка с координатами (A, B). Тогда неизвестный параметр t может быть получен из уравнения:

$$\sin t = \frac{B \cdot \left(R^2 + h^2\right) \cdot \left(R - a \cdot \cos(u)\right) + A \cdot h \cdot a \cdot \sin(u) \cdot \sqrt{R^2 + h^2}}{\left(R - a \cdot \cos(u)\right)^2 \left(R^2 + h^2\right) + \left(h \cdot a \cdot \sin(u)\right)^2}. \quad (1)$$

Для существования вещественного решения правая часть (1) должна быть меньше либо равна 1. Точки вне поверхности исключаются. В итоге получаем искомое значение параметра t^* с помощью функции arcsin. Затем вычисляем координату Z точки на sweep-поверхности:

$$Z = h \cdot t^* + \frac{R \cdot a \cdot \sin\left(u^*\right)}{\sqrt{R^2 + h^2}}.$$

Винтовые поверхности, образованные горизонтальным и вертикальным отрезками. Мы приведем решения для двух частных видов отрезков, так как для большинства практических приложений этого достаточно. Выражения для произвольного отрезка более громоздки, но выводятся аналогичным образом. Параметрическая поверхность S, образованная горизонтальным отрезком длины b, находящимся снизу от направляющей на расстоянии c, будет иметь вид:

$$S(t,u) = \vec{r}(t) + \vec{n}(t) \cdot (b - b \cdot u) + c \cdot \vec{b}(t).$$

Аналогично (1) получим

$$\sin t = \frac{B \cdot \left(R^2 + h^2\right) \cdot \left(R - b \cdot (1 - u)\right) + A \cdot h \cdot c \cdot \sqrt{R^2 + h^2}}{\left(R - b \cdot (1 - u)\right)^2 \left(R^2 + h^2\right) + (h \cdot c)^2}.$$

При этом координата Z точки на sweep-поверхности задается выражением:

$$Z = h \cdot t^* + \frac{R \cdot c}{\sqrt{R^2 + h^2}}.$$

Параметрическая поверхность S, образованная вертикальным отрезком длины c, находящимся справа на расстоянии b от направляющей, будет иметь вид:

$$S(t,u) = \vec{r}(t) + b\vec{n}(t) + cu\vec{b}(t).$$

Аналогично (1) получаем:

$$\sin t = \frac{B \cdot (R - b) + \left((A \cdot h \cdot c \cdot u) / \sqrt{R^2 + h^2}\right)}{(R - b)^2 + \left((h \cdot c \cdot u)^2 / \left(R^2 + h^2\right)\right)}.$$

При этом координата Z точки на sweep-поверхности задается выражением:

$$Z = h \cdot t^* + \frac{R \cdot c \cdot u}{\sqrt{R^2 + h^2}}.$$

Полученные формулы справедливы для общего спирального случая ($R < \infty$, $h > 0$). В случае окружности при $h = 0$ и $R < \infty$ (направляющая – сегмент окружности) выражения упрощаются подстановкой $R^2 + h^2 = R^2$, а сечения относятся к классу вертикальных сечений тора (овалы Кассини). При $R \to \infty$ (прямолинейный сегмент) направляющая вырождается в прямую, сечение строится как перенос контура профиля.

Обратная задача: алгоритм contour fitting. Описанный алгоритм строит дискретное приближение вертикального сечения NP-тела по заданным параметрам траектории и плоскости сечения за линейное от $\boldsymbol{K}$ число шагов (где $\boldsymbol{K}$ – количество точек в аппроксимирующей полилинии). Это позволяет поставить обратную задачу: по оцифрованному контуру граничного сечения NP-уходки восстановить параметры вертикальных сечений NP-тел, составляющих уходку. Описанная задача относится к широко известному в инженерной графике классу задач contour fitting (аппроксимации контура) [17].

Входные данные и вектор параметров. Пусть вертикальная плоскость сечения P задается точкой $O \in \mathbb{R}^3$ (трехмерное евклидово пространство) и единичным нормальным вектором n. В плоскости P введем ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \perp \boldsymbol{n}$ и матрицу перехода $E = [\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2] \in \mathbb{R}$^(3×2). Пусть в плоскости P задан набор точек сканирования $D = \{\xi_1, \ldots, \xi_N\} \subset \mathbb{R}^2$. Определим искомый вектор параметров: $\boldsymbol{\vartheta} = (\theta, h, R, \Delta\xi_1, \Delta\xi_2)$, где θ – угол между нормалью плоскости сечения и касательным вектором траектории, рад; h – шаг спирали, м; R – радиус спирали, м; $\boldsymbol{t} = (\Delta\xi_1, \Delta\xi_2)$ – вектор смещения вертикального сечения NP-тела, м. Все пять параметров являются искомыми и восстанавливаются из данных сканирования.

Функция ошибки и алгоритм градиентного спуска. Определим функцию ошибки:

$$E(\vartheta) = \sum_{j=1}^{N} \left\| \xi_j - \left[s_0\left(u_j^*; \theta, h, R\right) + \boldsymbol{t} \right] \right\|^2, \tag{2}$$

где u_j^* – параметр ближайшей к точке ξ_j минус $\boldsymbol{t}$ вершины полилинии S_0.

Алгоритм градиентного спуска минимизирует построенную функцию ошибки (2) путем итерационного обновления вектора параметров по направлению антиградиента. Градиент вычисляется конечно-разностным методом, а шаг спуска на каждой итерации подбирается методом backtracking line search (поиск шага с возвратом) [17], что гарантирует монотонное убывание ошибки. Критериями остановки служат малое относительное изменение значения ошибки (менее 10^{-6}) либо малая норма градиента (менее 10^{-4}).

Минимизация (2) приводит к восстановлению как формы сечения (θ, h, R), так и его положения $t = (\Delta\xi_1, \Delta\xi_2)$. Если уходка содержит несколько NP-тел, то обработка выполняется последовательно. Вводится булев массив $c = \{c_1, \ldots, c_N\}$, где $c_j = True$ означает, что точка ξ_j назначена одному из ранее обработанных NP-тел и исключена из последующей обработки. Изначально $c_j = False$ для всех j. Для каждого NP-тела $m = 1, \ldots, M$ выполняется градиентный спуск по свободным точкам $D_f^{(m)} = \{\xi_j \in D : c_j = False\}$. Начальное приближение: $t_0^{(m)}$ – центроид $D_f^{(m)}$,

остальные параметры – от предыдущего тела (для $m > 1$) или номинальные (для $m = 1$). После завершения очередной итерации точки с остатком $r_j < \varepsilon_{cap}$ (порядка точности сканирования) помечаются как захваченные: $c_j \leftarrow True$. Таким образом, каждое последующее тело притягивается по точкам, не захваченным предыдущими телами.

После завершения работы алгоритма для каждого NP-тела получаем искомые параметры $\theta^{(m)*}$, $h^{(m)*}$, $R^{(m)*}$, $\Delta\xi_1^{(m)*}$, $\Delta\xi_2^{(m)*}$. Строим дискретизацию $S_0^{(m)*}$ и переходим в глобальные координаты:

$$S^{(m)*} = O + E\left[S_0^{(m)*} + \boldsymbol{t}^{(m)*}\right].$$

В результате получаем декомпозицию граничного сечения V:

$$V = \bigcup_{m=1}^{M} S^{(m)*}.$$

Таким образом, задача декомпозиции решена: исходный отсканированный контур D представлен как M подобластей, каждая описывается параметрическим сечением NP-тела в трехмерном пространстве. На рис. 3, *б* представлен пример декомпозиции реального отсканированного вертикального сечения выработки.

Экспериментальная оценка точности. Использованы данные подземного лазерного сканирования очистных выработок горизонта, пройденного горнопроходческим комплексом типа «Урал», м: $r = 1{,}76$; $D = 5{,}09$; $H = 4/24$; $d = 2{,}418$; $h = 2{,}46$. Построение облаков точек осуществлялось с помощью мобильной лазерной сканирующей платформы MLSP. Всего использовано 6 наборов данных, в среднем по 1,5 млн точек каждый. Для каждого облака выбирался наиболее качественный участок, и строились два смежных вертикальных сечения (рис. 3, *а*) для построения loft-представления NP-уходки. Точки сечений использовались как входной набор D для алгоритма contour fitting. После декомпозиции смежных сечений строилось соответствующее loft-представление (рис. 3, *б*).

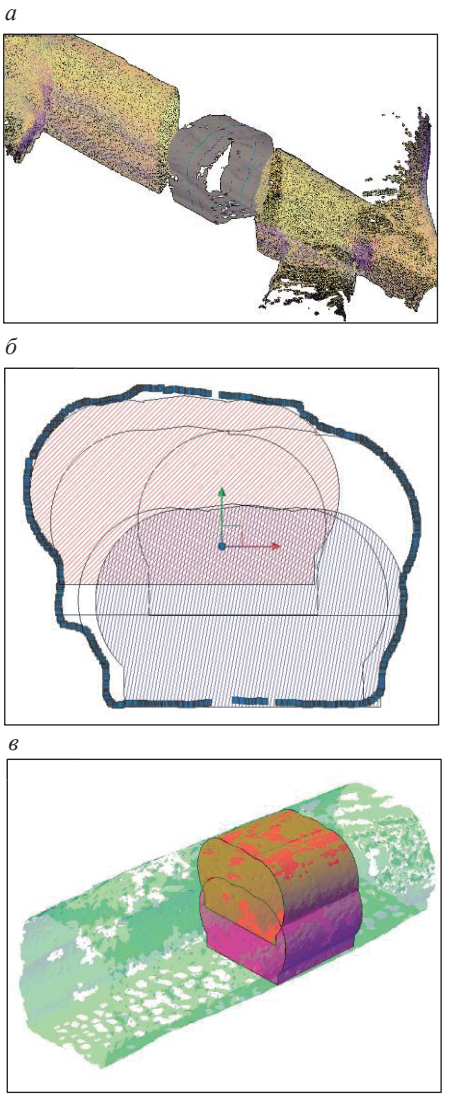

Рисунок 3. Этапы построения loft-представления: *а* – построение сечения; *б* – декомпозиции сечения; *в* – loft-представление (ПО AutoCad)

Figure 3. Stages of constructing a loft representation: *а* – section construction; *б* – section decomposition; *в* – loft representation (software AutoCAD)

Для каждого эксперимента фиксировались: $\sigma_{сеч}$ – среднее отклонение восстановленного контура от контуров граничных сечений, полученных на основе SSSR-поверхностей; $\sigma_{пов}$ – среднее отклонение loft-представления от

SSSR-поверхности, количество итераций; тип выработки (подрубка (П), сопряжение (С), наклон (*H*)), результаты представлены в табл. 1.

Точность восстановления контура сечения находится в пределах 0,05 м, отклонение поверхности – 0,07 м. Решающее влияние на точность восстановления контура оказывает качество сканирования, в том числе наличие посторонних предметов, искажающих контур выработки (просыпи, сколы, элементы оборудования и т. п.). Малое количество итераций (14–32) гарантирует высокую скорость построения модели. Для использованных в экспериментах условий (точность сканирования, уровень шума, средняя длина уходки) погрешность расчета объема составила около 5 %.

Таблица 1. Результаты тестирования алгоритма на данных лазерного сканирования поверхности калийных выработок
Table 1. Results of algorithm test based on the laser scanning data from potash working surfaces

Код скана	Количество точек, млн	Тип	Количество итераций	$\sigma_{сеч}$, м	$\sigma_{пов}$, м
1290	1,5	ПСН	31	0,051	0,067
4332	0,8	Н	15	0,029	0,042
4333	1,2	СН	32	0,045	0,056
4334	1,7	ПС	14	0,034	0,053
4338	1,8	ПСН	17	0,035	0,072
4339	0,7	Н	31	0,044	0,058

Заключение. Предложено гибридное геометрическое представление, сочетающее точность sweep-представления с компактностью и простотой loft-представления. NP-уходка декомпозируется на loft-тела, соответствующие отдельным проходкам комбайна; для построения loft-представления NP-уходки достаточно знать только граничные сечения. Разработан численный эффективный алгоритм построения вертикальных сечений NP-тел без явного построения 3D-поверхности, использующий свойство круговой проекции спиральных sweep-поверхностей.

Поставлена и решена обратная задача восстановления параметров траекторий по данным лазерного сканирования. Применен градиентный спуск методом backtracking line search. Обработка множества NP-тел выполняется последовательно: каждое тело притягивается к незанятым свободным точкам, после чего захваченные точки исключаются из обработки.

Экспериментальная проверка на данных подземного лазерного сканирования калийного месторождения показала точность восстановления контура 0,05 м, отклонение поверхности 0,07 м, сходимость градиентного спуска за 14–32 итерации. Для использованных условий (точность сканирования, уровень шума, средняя длина уходки) погрешность расчета объема составляет около 5 %.

Рассмотренная модель NP-уходки – базовый элемент для построения более сложных структур. Перспективным направлением является построение глобальной топологии горного горизонта на основе множества NP-уходок.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Cacciuttolo C., Atencio E., Komarizadehasl S., Lozano-Galant J. A. Development of an advanced multi-layer digital twin conceptual framework for underground mining // Sensors. 2025. Vol. 25. No. 21. Art. 6650. DOI: 10.3390/s25216650

2. Долгих А. С., Сенюк В. В., Коновалов О. Л. Создание системы геомеханического обеспечения подземных горных работ при разработке Старобинского месторождения // Горный журнал. 2018. № 8. С. 23–28. DOI: 10.17580/gzh.2018.08.01

3. ГИС-технологии при добыче полезных ископаемых. Специализированная корпоративная геоинформационная система «MapManager» / В. В. Видякин и др. Минск: Изд. центр БГУ, 2004. 208 с.

4. Босиков И. И., Камболов Д. А., Верисокин А. Е., Силаев И. В. Метод численного моделирования систем воздухообеспечения в угольных шахтах // Устойчивое развитие горных территорий. 2025. Т. 17. № 1. С. 17–26. DOI: 10.21177/1998-4502-2025-17-1-17-26

5. Бабенко А. Г. Научные, технологические и иные аспекты цифровизации производственных процессов // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. 2022. № 4. С. 90–100. DOI: 10.21440/0536-1028-2022-4-90-100

6. Коновалов О. Л. Информационное моделирование процессов функционирования горнодобывающих предприятий // Вестник Брестского государственного технического университета. Сер. Физика, математика, информатика. 2020. № 5. С. 9–13.

7. Yingbing Yang, Yunchuan Sun, Yuhong Wang. Exploring 3D roadway modeling techniques using CAD and Unity3D // Processes. 2025. Vol. 13. No. 8. Art. 2399. DOI: 10.3390/pr13082399

8. Zhang H., Mao S., Li M. A coal mine excavation tunnels modeling method based on point clouds // Applied Sciences. 2024. Vol. 14. No. 20. Art. 9454. DOI: 10.3390/app14209454

9. Yunan Cui, Junqiao Li, Yucheng Li, Zhitao Zhang, Jing Du. Multiscale geometric digital twins of mine tunnels that integrate topological evolution and local reconstruction // Tunnelling and Underground Space Technology. 2026. Vol. 169. Art. 107317. DOI: 10.1016/j.tust.2025.107317

10. Yizhe Zhang, Jianping Li, Xin Zhao, Fuxun Liang, Zhen Dong, Bisheng Yang. ARMOR: Adaptive meshing with reinforcement optimization for real-time 3D monitoring in unexposed scenes // ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing. 2026. DOI: 10.1016/j.isprsjprs.2026.05.046

11. Mingrui Zhao, Yizhi Wang, Fenggen Yu, Changqing Zou, Ali Mahdavi-Amiri. SweepNet: Unsupervised learning shape abstraction via neural sweepers // Computer Vision – ECCV 2024. 2024. DOI: 10.1007/978-3-031-72913-3_17

12. Yongjie Jessica Zhang. Geometric modeling and mesh generation from scanned images. Boca Raton: CRC Press, 2018. 364 p.

13. Liang S., Bao A., Shen E., Wang J. A survey of Boolean operations in 3D geometric modeling // Computer-Aided Design. 2026. Vol. 197. Art. 104081. DOI: 10.1016/j.cad.2026.104081

14. Zhiyuan Li, Jian Wang, Fengqi Zhu, Digui Li. Analysis of point cloud data of tunnel cross-section using cubic B-spline curve // IOP Conference Series Earth and Environmental Science. 2021. Vol. 643. No. 1. Art. 012064. DOI: 10.1088/1755-1315/643/1/012064

15. Dogrusadik A. Swept volume cross-section of a general form cutter during 3-axis helical milling // International Journal on Interactive Design and Manufacturing. 2026. Vol. 20. P. 3585–3601.

16. Abdel-Malek K., Yeh H. J. Formulation of the equations of swept volumes in joint space // Computer-Aided Design. 1997. Vol. 29. No. 9. P. 633–646. DOI: 10.1016/S0010-4485(97)00009-8

17. Mingyang Zhao, Xiaohong Jia, Lubin Fan, Yuan Liang, Dong-Ming Yan. Robust ellipse fitting using hierarchical Gaussian mixture models // IEEE Transactions on Image Processing. 2021. Vol. 30. P. 4443–4456. DOI: 10.1109/TIP.2021.3066855

Поступила в редакцию 13 июля 2026 года

Сведения об авторах:

Коновалов Олег Леонидович – кандидат технических наук, доцент, заведующий лабораторией информационных технологий и компьютерной графики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета. E-mail: konovalovol@bsu.by; https://orcid.org/0009-0009-6367-4655

Краснопрошин Виктор Владимирович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем управления факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета. E-mail: krasnoproshin@bsu.by

DOI: 10.21440/0536-1028-2026-5-89-99

Dynamic three-dimensional model of underground mining space

Oleg L. Konovalov[1], Viktor V. Krasnoproshin[1]
[1] Belarusian State University, Minsk, Belarus.

Abstract

Introduction. *Three-dimensional models of the underground space form the core of digital twins of mining enterprises and must be dynamic, i.e. accurately reflecting the current state of the physical prototype at any time.*

The research objective *is to develop a three-dimensional model of underground mining and the modelling technology that ensures high geometric accuracy under minimal labor costs.*
Methods of research. *A hybrid geometric model of underground space is proposed. The model combines the accuracy of the sweep approach with the simplicity of the loft approach. The geometry of a mine working is decomposed into loft-bodies corresponding to individual cutter drivages. An algorithm for decomposing a vertical section cross section based on the gradient descent method with the robust loss function is proposed; it makes it possible to recover the cutter's trajectory parameters from scanned cross-section data.*
Results. *Experimental verification using underground laser scanning data of a potash deposit showed contour recovery accuracy of 0.05 m and surface deviation of 0.07 m, with 10–30 iterations being sufficient for gradient descent algorithm convergence. Experiments revealed that the mine working volume calculation error is about 5% when using the proposed model.*
Conclusions. *A three-dimensional model of underground mining and the modelling technology have been developed, providing high geometric accuracy with minimal labor costs for its development and support. The developed model has compact representation and enables solving most digital twin tasks: equipment placement, ventilation calculation, transport route construction, etc.*

Keywords: *digital twin; underground mine working; three-dimensional modeling; sweep surface; contour fitting algorithm; robust estimation; laser scanning; bedded deposits.*

REFERENCES

1. Cacciuttolo C., Atencio E., Komarizadehasl S., Lozano-Galant J. A. Development of an advanced multi-layer digital twin conceptual framework for underground mining. *Sensors*. 2025; 25(21): 6650. DOI: 10.3390/s25216650

2. Dolgikh A. S., Seniuk V. V., Konovalov O. L. Creating a geomechanical support system for underground mining in course of the Starobinskoye deposit development. *Gornyi Zhurnal = Mining Journal*. 2018; 8: 23–28. (In Russ.) DOI: 10.17580/gzh.2018.08.01

3. Vidiakin V. V. et al. *GIS technologies in mining. Specialized corporate GIS "MapManager"*. Minsk: BSU Publishing; 2004. (In Russ.)

4. Bosikov I. I., Kambolov D. A., Verisokin A. E., Silaev I. V. Numerical modeling for complex air supply systems in coal mines. *Ustoichivoe razvitie gornykh territorii = Sustainable Development of Mountain Territories*. 2025; 17(1): 17–26. (In Russ.) DOI: 10.21177/1998-4502-2025-17-1-17-26

5. Babenko A. G. Scientific, technological and other bases of production processes digitalization. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Gornyi zhurnal = Minerals and Mining Engineering*. 2022; 4: 90–100. (In Russ.) DOI: 10.21440/0536-1028-2022-4-90-100

6. Konovalov O. L. Information modeling of mining enterprises operation. *Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Ser. Fizika, matematika, informatika = Bulletin of Brest State Technical Univeristy. Ser. Physics, Mathematics, Information Technology*. 2020; 5: 9–13. (In Russ.)

7. Yingbing Yang, Yunchuan Sun, Yuhong Wang. Exploring 3D roadway modeling techniques using CAD and Unity3D. *Processes*. 2025; 13(8): 2399. DOI: 10.3390/pr13082399

8. Zhang H., Mao S., Li M. A coal mine excavation tunnels modeling method based on point clouds. *Applied Sciences*. 2024; 14(20): 9454. DOI: 10.3390/app14209454

9. Yunan Cui, Junqiao Li, Yucheng Li, Zhitao Zhang, Jing Du. Multiscale geometric digital twins of mine tunnels that integrate topological evolution and local reconstruction. *Tunnelling and Underground Space Technology*. 2026; 169: 107317. DOI: 10.1016/j.tust.2025.107317

10. Yizhe Zhang, Jianping Li, Xin Zhao, Fuxun Liang, Zhen Dong, Bisheng Yang. ARMOR: Adaptive meshing with reinforcement optimization for real-time 3D monitoring in unexposed scenes. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*. 2026. DOI: 10.1016/j.isprsjprs.2026.05.046

11. Mingrui Zhao, Yizhi Wang, Fenggen Yu, Changqing Zou, Ali Mahdavi-Amiri. SweepNet: Unsupervised learning shape abstraction via neural sweepers. *Computer Vision – ECCV 2024*. 2024. DOI: 10.1007/978-3-031-72913-3_17

12. Yongjie Jessica Zhang. *Geometric modeling and mesh generation from scanned images*. Boca Raton: CRC Press, 2018.

13. Liang S., Bao A., Shen E., Wang J. A survey of Boolean operations in 3D geometric modeling. *Computer-Aided Design*. 2026; 197: 104081. DOI: 10.1016/j.cad.2026.104081

14. Zhiyuan Li, Jian Wang, Fengqi Zhu, Digui Li. Analysis of point cloud data of tunnel cross-section using cubic B-spline curve. *IOP Conference Series Earth and Environmental Science*. 2021; 643(1): 012064. DOI: 10.1088/1755-1315/643/1/012064

15. Dogrusadik A. Swept volume cross-section of a general form cutter during 3-axis helical milling. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing*. 2026; 20: 3585–3601.

16. Abdel-Malek K., Yeh H.J. Formulation of the equations of swept volumes in joint space. *Computer-Aided Design.* 1997; 29(9): 633–646. DOI: 10.1016/S0010-4485(97)00009-8

17. Mingyang Zhao, Xiaohong Jia, Lubin Fan, Yuan Liang, Dong-Ming Yan. Robust ellipse fitting using hierarchical Gaussian mixture models. *IEEE Transactions on Image Processing.* 2021; 30: 4443–4456. DOI: 10.1109/TIP.2021.3066855Received 13 July 2026

Received 13 July 2026

Information about the authors:

Oleg L. Konovalov – PhD (Engineering), Associate Professor, Head of the Laboratory of Information Technology and Computer Graphics, the Applied Mathematica and Computer Science Faculty, Belarusian State University. E-mail: konovalovol@bsu.by; https://orcid.org/0009-0009-6367-4655

Viktor V. Krasnoproshin – DSc (Engineering), Professor, professor of the Department of Management Information Systems, the Applied Mathematica and Computer Science Faculty, Belarusian State University. E-mail: krasnoproshin@bsu.by

Для цитирования: Коновалов О. Л., Краснопрошин В. В. Динамическая трехмерная модель подземного горного пространства // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. 2026. № 5. С. 89–99. DOI: 10.21440/0536-1028-2026-5-89-99

For citation: Konovalov O. L., Krasnoproshin V. V. Dynamic three-dimensional model of underground mining space. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Gornyi zhurnal = Minerals and Mining Engineering.* 2026; 5: 89–99 (In Russ.). DOI: 10.21440/0536-1028-2026-5-89-99