ГЕОМЕХАНИКА. РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД.

УДК 622.023.623 DOI: 10.21440/0536-1028-2025-5-48-57

Фрактальный анализ структуры поверхностей трещин

Соколов В. В.[1], Франц В. В.[2]*, Яковлев А. В.[1]
[1] Институт горного дела УрО РАН, г. Екатеринбург, Россия
[2] Уральский государственный горный университет, г. Екатеринбург, Россия
e-mail: franc_vv@mail.ru

Реферат

Введение. *Практически не существует надежной методики осуществления сдвига пород по реальным трещинам массива (натурного эксперимента), преобладают лабораторные исследования на эквивалентных материалах. Столь упрощенный подход крайне неточен и не отражает истинную геометрию поверхностей ослабления. Необходимо проводить эксперименты с горной породой и присущей ей реальной трещиной, поскольку реальные трещины далеки от такой идеализированной модели.*

Актуальность. *Потеря устойчивости горных выработок (как подземных, так и открытых) в трещиноватых породных массивах определяется, как правило, сдвигом пород по трещинам отдельности. Однако геометрия природной трещины может быть установлена только по ее следу на обнажении пород, доступа к ее поверхности в натурных условиях, как правило, нет. В связи с этим исследования, направленные на прогноз рельефа трещины по ее следу на обнажении, являются актуальными.*

Цель работы *– разработка методов и средств прогноза фрактальных характеристик поверхности ослабления пород (трещины) для оценки устойчивости выработок в трещиноватых массивах.*

Методология исследований *– фрактальный анализ с применением прикладных и специально разработанных программ для получения матрицы координат характерных точек поверхности трещин.*

Результаты и выводы. *С помощью разработанной технологии автоматизированного извлечения матрицы координат получены координаты поверхностей реальных трещин. Проведен фрактальный анализ для каждого из образцов и рассчитана фрактальная размерность. Установлено, что технология автоматизации извлечения координат поверхности трещин и разработанная компьютерная программа позволяют провести анализ поверхности даже сложных трещин, оценить геометрию поверхности трещин в образцах или получить информацию о характеристиках рельефа поверхностей скольжения трещиноватых массивов.*

Ключевые слова: *горные породы; фрактальная размерность; поверхность трещины; сдвиг по трещине; структура поверхности.*

Статья подготовлена *при выполнении Гос. задания № 075-00410-25-00, № гос. рег. 125070908257-0, тема 1 (2025–2027) «Методология обоснования перспектив технологического развития комплексного освоения минерально-сырьевых ресурсов твердых полезных ископаемых России (FUWE-2025-0001)».*

Введение. Исследование устойчивости обнажений горных пород является важнейшей научной и практической задачей в горном деле. Ее решению посвящено большое количество работ, где в качестве критериев устойчивости используются соотношения действующих напряжений и прочности породного массива. При этом теория вопроса нередко сводится к рассмотрению идеально упругой или идеально сыпучей среды. Однако потеря устойчивости трещиноватых массивов определяется

преимущественно сдвигом пород по трещинам. Надежной методики осуществления сдвига пород по реальным трещинам массива (натурного эксперимента) практически не существует, поэтому преобладают лабораторные исследования на эквивалентных материалах. При этом условия подобия либо не учитываются, либо совсем не рассматриваются, а реальный профиль трещины заменяется зубцами геометрически правильной формы [1]. Очевидно, что столь упрощенный подход крайне неточен и не отражает истинную геометрию поверхностей ослабления. Реальные трещины далеки от такой идеализированной модели, поэтому нужно проводить эксперименты с горной породой и присущей ей реальной трещиной.

Методология. В настоящее время наиболее адекватным признается подход Н. Бартона [2, 3], который выделил две стадии сдвига, определяемые соответственно уравнениями:

$$\tau = \sigma \mathrm{tg}\left[\varphi_{\text{ост}} + K_{\text{ш}} \lg\left(\sigma_{\text{тр}} / \sigma\right)\right] + C;$$
$$\tau = \sigma \mathrm{tg}\left[\varphi_{\text{ост}} + \alpha_{\text{в}}\right] + C,$$

где τ, σ – касательные и нормальные напряжения; $\varphi_{\text{ост}}$ и C – определяемые в опыте значения угла внутреннего трения и сцепления; $K_{\text{ш}}$ – коэффициент шероховатости; $\sigma_{\text{тр}}$ – прочность при сжатии материала стенок трещины; $\alpha_{\text{в}}$ – угол волнистости.

Границей между двумя стадиями сдвига является величина напряжений $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тр}}/10^{(\alpha_{\text{в}}/K_{\text{ш}})}$.

При изучении трещиноватости горных пород определение геометрии поверхности трещин является важнейшей задачей. Для прогноза сдвига пород по трещинам необходимы количественные оценки неровности поверхности. Проведено профилирование поверхности трещин образцов гранита и базальта (рис. 1, *а*, *в*).

Координаты поверхностей трещин определялись двумя способами. При одном на поверхности берегов трещины с точностью 0,1 мм определялись превышения ординат по параллельным сечениям с сеткой измерений 2 мм [4]. При втором – экспортировались координаты с оцифрованных поверхностей гранита и базальта (рис. 1, *б*, *г*).

В отличие от первого способа, где поверхности трещин покрывались равномерной сеткой точек через определенные расстояния, при втором сетка точек имела случайный характер, однако количество точек было значительно увеличено.

Как доказано многочисленными исследованиями [5–7], трещины в скальных породах являются фрактальными объектами. В связи с этим их поверхности могут характеризоваться фрактальной размерностью, которая на практике обычно определяется методом циркуля или методом покрытия [5]. Использование метода циркуля для оценки фрактальной размерности поверхностей не представляется возможным из-за его ограничений [7]. Наряду с методом покрытия (box-counting method) могут быть использованы и другие [8–12].

Классическая процедура определения фрактальной размерности поверхности методом покрытия заключается в следующем. На измеряемую поверхность наносится кубическая сетка с размером ячейки $1/3^n$, n – длина ребра ячейки покрытия. Подсчитывается минимальное количество кубов, покрывающих данную поверхность $N_n(S)$. Фрактальная размерность определяется из соотношения:

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_n\left(S\right)}{\log\left(3^n\right)}, \tag{1}$$

где ε – размер кубической сетки.

В работе [4] авторами предложено проводить анализ поверхности трещин двумя способами. Первый – исследование совокупности различных сечений поверхности, второй – анализ координат всей поверхности как единой совокупности. При исследовании сечений по различным профилям (линиям) на поверхности

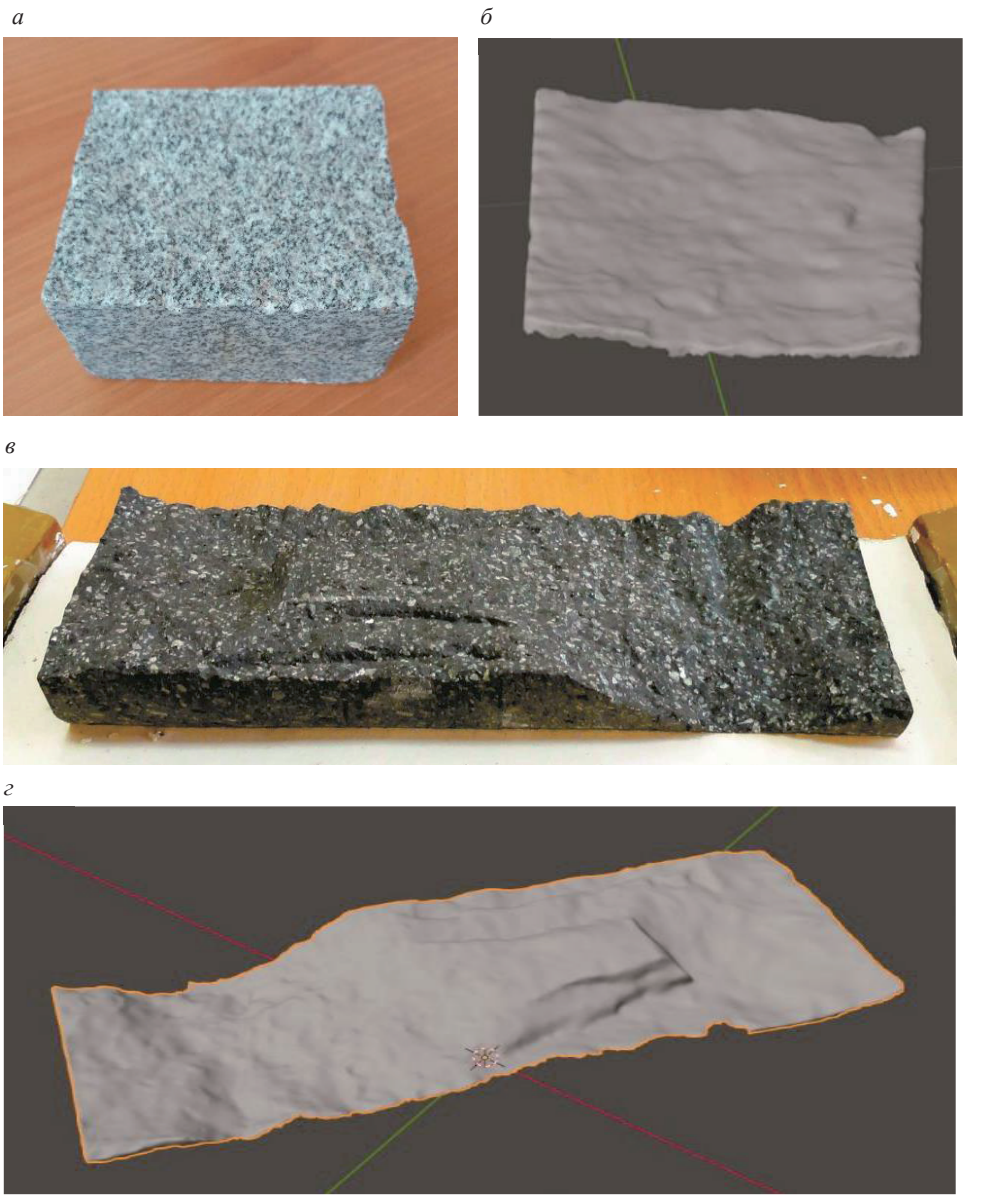

Рисунок 1. Поверхности трещин: фотографии гранита – *а*; базальта – *в*; оцифрованные модели: гранита – *б*; базальта – *г*

Figure 1. Fracture surfaces: photos of granite – *а*; basalt – *в*; digitized models of granite – *б*; basalt – *г*

через равные интервалы Δx определяются координаты превышений Δz от некоторой нулевой плоскости. Строится профилограмма в виде графика функции $Z = f(x)$.

Всю кривую разбивают на минимально возможные отрезки δ_0, соответствующие разрешающей способности метода. На каждом отрезке определяются координаты точки поверхности x_i, z_i. Затем кривая разбивается на секции длиной $\delta_0 N_i$ с последовательным изменением числа разбиений. Для каждой секции вычисляются дисперсии $S^2(x)$, $S^2(z)$ и среднеквадратические отклонения S_x, S_z. При наличии фрактальных свойств поверхности наблюдаются соотношения:

$$S_x \sim N^{dx}; \qquad S_z \sim N^{dz}. \tag{2}$$

где d_x, d_z – показатели степени.

По наклону графиков в двойном логарифмическом масштабе определяются величины показателей степени d_x и d_z. В общем случае среднеквадратические отклонения связаны между собой показателем Херста H в виде [13]: $S_z \sim S_x^H$.

Тогда из уравнений (2) следует, что $H = d_z/d_x$.

Поскольку показатель Херста изменяется от 0 до 1, то $d_z < d_x$. В частном случае $d_x = d_z = 1/d_f$, имеет место самоподобная фрактальная кривая. Для самоаффинных фракталов $d_x = 1$ и $0 < d_z < 1$. Для изотропной поверхности фрактальная размерность определяется усредненным значением $< H >$ по разным профилям как $d_{f2} = 2 + < H >$. Размерность самого профиля, т. е. кривой $Z = f(x) – d_{f1} = 1 + H$, может интерпретироваться как степень изрезанности рельефа поверхности. Вычисляя d_{f1} по различным профилям, можно оценить степень анизотропии поверхности.

Фрактальную размерность всей поверхности предлагается определять из выражения:

$$D = 3 – H. \tag{3}$$

В отличие от классической интерпретации, где покрытие осуществляется кубами, применительно к поверхности трещин рекомендуется использовать параллелепипеды с высотой, пропорциональной превышениям. В этом случае в формуле:

$$\ln Li \sim \ln[N(Li)], \tag{4}$$

Li – будет отражать величину превышений, а угол наклона логарифмической линии соответствовать показателю Херста H. Фрактальная размерность поверхности определится из выражения (3).

Реализация такой методики показала, что для трещины в образце гранита размер превышений находится в интервале от 0 до 8,37 мм при размерах проекции трещины 90 × 98 мм. Основание параллелепипедов покрытия приято 2 × 2 мм. Их высота последовательно менялась со следующим шагом: L, мм – 0,1; 0,2; 0,25; 0,5; 0,75; 0,9; 1,0; $N(Li)$ – 994; 611; 516; 293; 212; 191; 170. Логарифмическая зависимость (4) приведена на рис. 2.

Все опытные точки практически точно ложатся на логарифмическую линию, что подтверждает фрактальные свойства поверхности трещины. Показатель Херста $H = 0{,}772$, фрактальная размерность поверхности $D_L = 2{,}228$.

Реализация этой же процедуры в компьютерной программе для трещины базальта показала следующие результаты: L, мм – 0,2; 0,3; 0,5; 0,8; 1,0; 1,2; 1,5; 1,8; 2,0; $N(Li)$ – 1614; 1319; 931; 666; 547; 469; 384; 326; 291. График логарифмического

уравнения (4) и его интерпретация для рассматриваемой трещины дает величины: H = 0,751; D_L = 2,249. Описанная процедура основана на ручном измерении координат и отличается высокой трудоемкостью. Так, при определении координат поверхностей образцов произведено 2300 и 3600 инструментальных измерений для каждой поверхности. Для автоматизации процесса расчета фрактальной размерности авторами [4] разработана компьютерная программа в системе электронных таблиц.

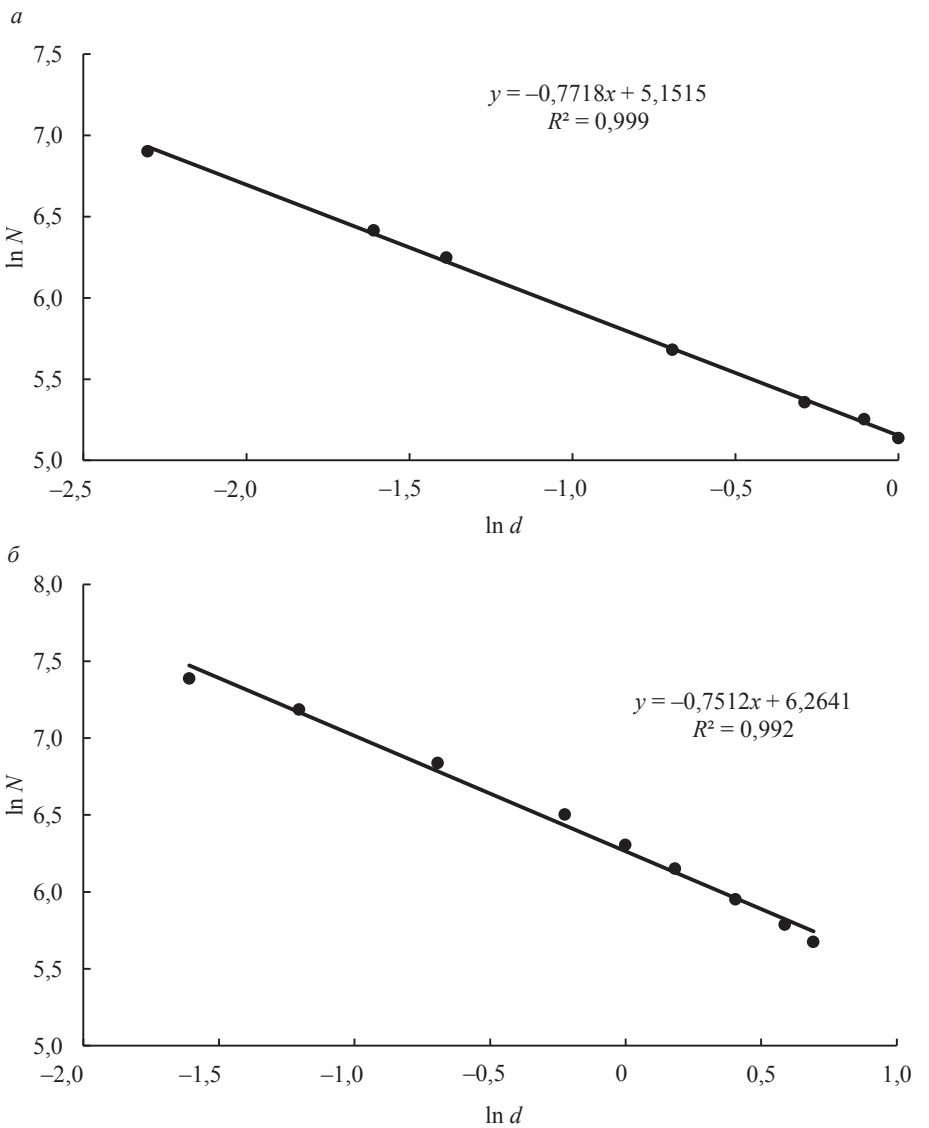

Рисунок 2. Логарифмическая зависимость уравнения (4) для трещины: гранита – *а*; базальта – *б*
Figure 2. Logarithmic dependence of equation (4) for granite fracture – *а*; basalt fracture – *б*

Главной задачей автоматизации фрактального анализа является получение координат характерных точек поверхности трещины. При этом, чем выше плотность облака покрытия поверхности точками, тем более подробные характеристики рельефа исследуемого объекта учитываются в дальнейшем расчете. Даже са-

мые современные методики расчета обладают рядом ограничений – при недостаточном количестве исходных данных точность расчета снижается, а в некоторых случаях результаты расчета полностью не отражают характеристики исследуемой поверхности. Во избежание подобных ситуаций, особенно при расчете фрактальной размерности поверхности сложных трещин, необходимо обладать значительной базой данных характерных точек рельефа поверхности трещины. С этой целью авторами разработана технология по автоматическому извлечению координат характерных точек поверхности трещин, а также специализированная компьютерная программа для расчета фрактальной размерности поверхности трещин, координаты которых получены автоматизированным способом. Следует отметить, что разработанная технология извлечения координат поверхности позволяет не только обрабатывать характерные точки поверхности, но и корректировать их количество в зависимости от сложности самой поверхности или необходимой точности расчета.

Для оценки адекватности методики анализировались поверхности базальта и гранита, матрица координат которых первоначально определялась ручным способом. Для этого оцифрованная поверхность базальта покрывалась сеткой из 471 268 точек, а поверхность гранита – сеткой из 570 933 точек, координаты которых впоследствии были экспортированы и обработаны. Расчет фрактальной размерности производился классическим методом покрытия (box-counting method). Поверхности, как и в первом случае, покрывались параллелепипедами различных размеров. Графики логарифмического уравнения (1) для поверхностей гранита и базальта представлены на рис. 3.

Результаты. Согласно расчетам, фрактальная размерность поверхности трещины гранита составила 2,348, а поверхности трещины базальта – 2,350. Эти данные хорошо согласуются с результатами расчетов фрактальной размерности поверхностей гранита и базальта, координаты которых получены ручным способом: 2,228 и 2,249, соответственно. Отличия в значениях обусловлены более подробным изучением поверхностей за счет значительного увеличения количества точек при расчете фрактальной размерности вторым способом.

Совокупность полученных результатов свидетельствует, что извилистость рельефа поверхности реальных трещин можно адекватно оценить с помощью фрактальной размерности. Однако в реальных трещиноватых массивах поверхности, образованные трещинами и представляющие интерес, зачастую закрыты, доступ имеется лишь к следу трещины на обнажении пород. Кроме того, сам след трещины – это лишь один из видов ее реализации, и в этом качестве процесс формирования трещины носит вероятностный характер. Указанную проблему можно разрешить путем статистического моделирования. Наиболее подходящим инструментом для реализации такого моделирования является метод Монте-Карло [14, 15]. Б. Мохаддамом [16] предложено уравнение процесса фрактального броуновского движения в двумерном пространстве: $<[V(x,y) - V(x + \Delta x; y + \Delta y)]^2> = [\Delta x^2 + \Delta y^2]^{\boldsymbol{H}}$, где $\boldsymbol{H}$ – показатель Гельдера.

Используя уравнение фрактального броуновского движения как основу процесса моделирования, показатель Гельдера определяется путем анализа природной трещины на образце или по фрактальной размерности следа трещины на обнажении.

Уравнение Ричардсона [17] связывает длину линии (траектории трещины) с шагом ее измерения δ: $L(\delta) = \alpha\delta^{\beta}$, где α – некоторая константа; β – отрицательный

показатель степени. Тогда, используя это уравнение, по измеренной длине линии на обнажении, при различном масштабе, определяется линейная зависимость: $\ln L(\delta) = (1 - d_f) \ln \delta + \ln \alpha$, где d_f – фрактальная размерность. Угол наклона графика определит показатель Гельдера $\boldsymbol{H} = 1 - d_f$.

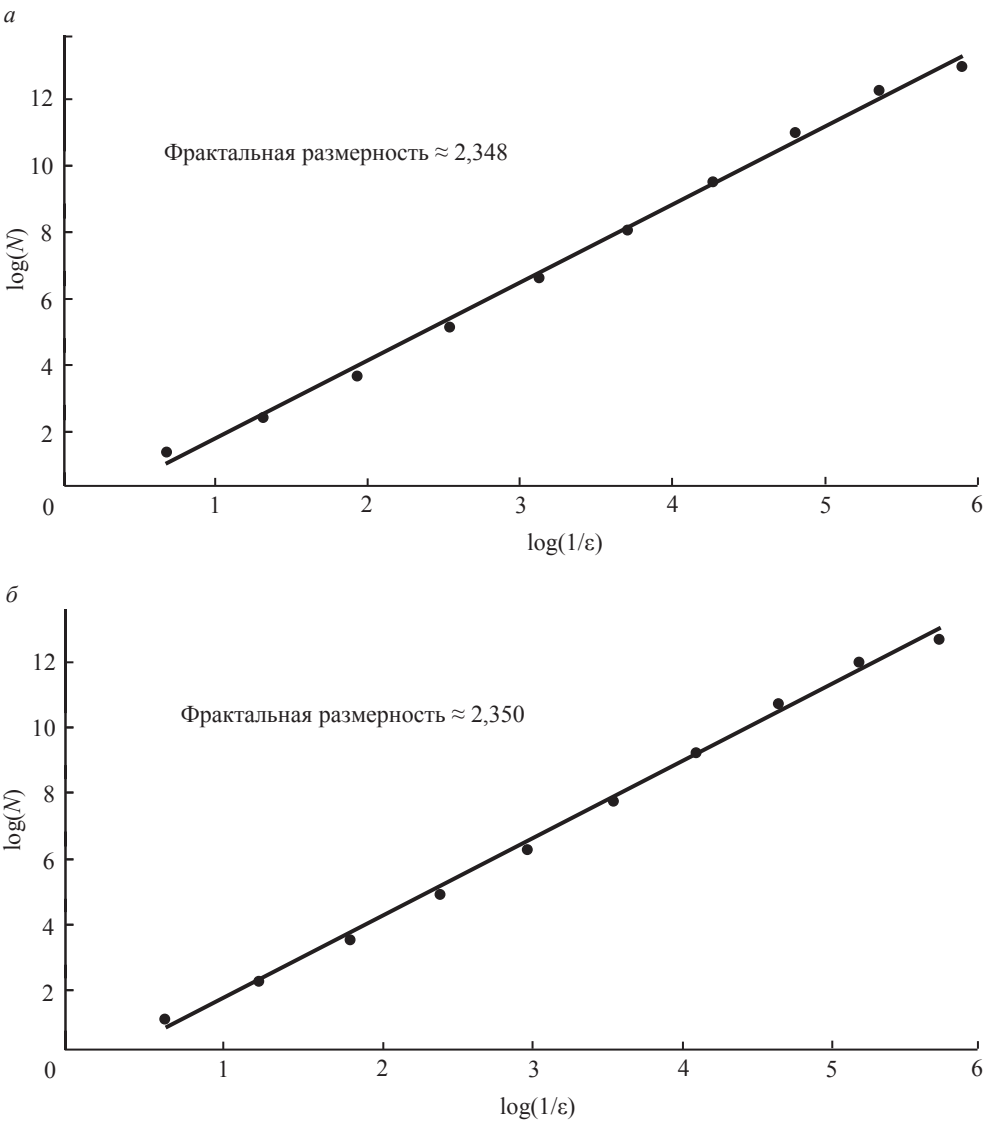

Рисунок 3. Логарифмическая зависимость уравнения (1) для поверхностей: гранита – *а* и базальта – *б*
Figure 3. Logarithmic dependence of equation (1) for granite surface – *a* and basalt surface – *б*

Выводы. Технология автоматизации получения координат поверхности трещин и разработанная компьютерная программа позволяют провести анализ поверхности даже сложных трещин, оценить геометрию поверхности трещин в образцах или получить информацию о характеристиках рельефа поверхностей скольжения трещиноватых массивов. Все это позволит спрогнозировать устойчивость обнажений горных пород, а также определить энергетические характеристики разрушения горных пород, основываясь на теории трещин Гриффитса.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Карташов Ю. М., Матвеев Б. В., Михеев Г. В. Прочность и деформируемость горных пород. М.: Недра, 1979. 269 с.
2. Barton N. R., Bandis S. Review of predictive capabilities of JRC-JCS model in engineering practice // Proceedings International Symposium on Rock Joints, Loen, 4–6 June, 1990. Rotterdam: Balkema, 1990. P. 603–610. DOI: 10.1016/0148-9062(91)90682-C
3. Barton N. Shear strength criteria for rock, rock joints, rockfill and rock masses: Problems and some solutions // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. 2013. No. 5. P. 249–261. DOI: 10.1016/j.jrmge.2013.05.008
4. Латышев О. Г., Франц В. В., Прищепа Д. В. Исследование поверхности природных трещин как фрактального объекта // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. 2016. № 3. С. 44–50.
5. Осипов И. С., Сынбулатов В. В., Карасев К. А. Исследование фрактальной размерности трещин в горных породах // ГИАБ. 2009. № 1. С. 150–156.
6. Латышев О. Г., Франц В. В., Прищепа Д. В. Фрактальная размерность трещины как мера ее шероховатости // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. 2015. № 8. С. 55–60.
7. Латышев О. Г., Осипов И. С., Сынбулатов В. В., Еремизин А. Н. Определение фрактальной размерности трещин для оценки прочности горных пород // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. 2009. № 8. С. 118–124.
8. Имашев С. А., Чешев М. Е. Оценка фрактальной размерности поверхности разрушения образцов горных пород // Геоинформатика. 2021. № 1. С. 36–44.
9. Сулейманова Л. А., Рябчевский И. С. Фрактальная размерность формы пор ячеистого бетона // Университетская наука. 2023. № 2(16). С. 68–70.
10. Слетков Д. В., Хлебников В. В., Зубаков А. П. Методы вычисления фрактальной размерности изображений // Наукосфера. 2021. № 3-2. С. 173–180.
11. Маматов Э. У., Ташполотов Ы., Ибраимов Т. К. Исследование микрорельефа (фрактальные свойства) поверхности кристаллов базальтовых пород Кызыл-Кийского месторождения КР // Вестник Ошского государственного университета. 2022. № 1. С. 205–213.
12. Feder J. Fractals. NY: Springer, 2013. 284 p. DOI: 10.1007/978-1-4899-2124-6
13. Потапов А. А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. Топология выборки. М.: Университетская книга, 2005. 848 с.
14. Соболь И. М. Метод Монте-Карло. М.: Наука, 1978. 64 с.
15. Хеерман Д. В. Методы компьютерного эксперимента в теоретической физике. М.: Наука, 1990. 176 с.
16. Richard M. Crownover. Introduction to fractals and chaos. Boston: Jones and Bartlett Publishers, Inc., 1995. 320 p.
17. Mandelbrot B. The fractal geometry of nature. New York: Echo Point Books & Media, LLC, 2021. 490 p.

Поступила в редакцию 29 августа 2025 года

Сведения об авторах:

Соколов Василий Владимирович – кандидат технических наук, ведущий инженер сектора устойчивости бортов карьеров Института горного дела УрО РАН. E-mail: lubk_igd@mail.ru; https://orcid.org/0009-0005-4356-154X

Франц Владимир Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры шахтного строительства Уральского государственного горного университета. E-mail: franc_vv@mail.ru; https://orcid.org/0000-0001-5786-684X

Яковлев Алексей Викторович – кандидат технических наук, заведующий сектором устойчивости бортов карьеров Института горного дела УрО РАН. E-mail: lubk_igd@mail.ru

DOI: 10.21440/0536-1028-2025-5-48-57

Fractal analysis of the fracture surface structure

Vasilii V. Sokolov[1], Vladimir V. Frants[2], Aleksei V. Iakovlev[1]

[1] Institute of Mining UB RAS, Ekaterinburg, Russia.

[2] Ural State Mining University, Ekaterinburg, Russia.

Abstract

Introduction. *There are scarcely any reliable methods and full-scale experiments for shear along real fractures; laboratory research on equivalent materials prevail lacking accuracy and failing to reflect the true geometry of the plane of weakness. Experiments with in-situ rock and its inherent real fracture are essential, since real fractures are far from an idealized model.*

Research relevance. *The loss of stability of underground and open mine workings in fractured rock masses is generally determined by the shear along the joint. However, the geometry of a natural fracture can only be determined by its trace on the outcrop, while there is hardly any access to its surface in natural conditions. In this regard, research aimed at predicting the relief of a fracture by its trace on the outcrop are relevant.*
Research objective *is to develop methods and tools for predicting the fractal characteristics of the plane of weakness (fractures) to assess the stability of workings in fractured rock masses.*
Methods of research include fractal analysis using applied and ad hoc programs to obtain a coordinate matrix for characteristic points of the fracture surface.
Results and conclusions. *Using the advanced technology of automated extraction of the coordinate matrix, the coordinates of the surfaces of real fractures were obtained. Fractal analysis for each sample was carried out, and the fractal dimension was calculated. It was found that the technology of automated extraction of fracture surface coordinates and the developed computer program allow analyzing the surface of even complex fractures, assessing the geometry of the fracture surface in the samples or obtaining information on the relief of the fractured rock mass sliding surface.*

Keywords: *rocks; fractal dimension; fracture surface; displacement along the fracture; surface structure.*

The research was carried out *within the state assignment no 075-00410-25-00, reg. no. 125070908257-0, topic 1 (2025–2027) "Methodology for substantiating the prospects for technological development of the of solid mineral resources integrated development in Russia (FUWE-2025-0001)".*

REFERENCES

1. Kartashov Iu. M., Matveev B. V., Mikheev G. V. *Strength and strain of rocks.* Moscow: Nedra Publishing; 1979. (In Russ.)

2. Barton N. R., Bandis S. Review of predictive capabilities of JRC-JCS model in engineering practice. In: *Proceedings International Symposium on Rock Joints, Loen, 4–6 June, 1990.* Rotterdam: Balkema, 1990. P. 603–610. Available from: doi: 10.1016/0148-9062(91)90682-C

3. Barton N. Shear strength criteria for rock, rock joints, rockfill and rock masses: Problems and some solutions. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering.* 2013; 5: 249–261. Available from: doi: 10.1016/j.jrmge.2013.05.008

4. Latyshev O. G., Frants V. V., Prishchepa D. V. Examination of natural fissures surface as fractal object. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Gornyi zhurnal = News of the Higher Institutions. Mining Journal.* 2016; 3: 44–50. (In Russ.)

5. Osipov I. S., Synbulatov V. V., Karasev K. A. A rock crevices fractal dimension investigation. *Gornyi informatsionno-analiticheskii biulleten (nauchno-tekhnicheskii zhurnal) = Mining Informational and Analytical Bulletin (scientific and technical journal).* 2009; 1: 150–156. (In Russ.)

6. Latyshev O. G., Frants V. V., Prishchepa D. V. Fractal dimension of a fissure as a measure of its roughness. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Gornyi zhurnal = News of the Higher Institutions. Mining Journal.* 2015; 8: 55–60. (In Russ.)

7. Latyshev O. G., Osipov I. S., Synbulatov V. V., Eremizin A. N. Fissures fractal dimension determination for rock firmness estimation. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Gornyi zhurnal = News of the Higher Institutions. Mining Journal.* 2009; 8: 118–124. (In Russ.)

8. Imashev S. A., Cheshev M. E. Estimation of fractal dimension of rock samples fracture surface. *Geoinformatika = Geoinformatics.* 2021; 1: 36–44. (In Russ.)

9. Suleimanova L. A., Riabchevskii I. S. Fractal dimension of the porous shape of cellular concrete. *Universitetskaia nauka = University Science.* 2023; 2(16): 68–70. (In Russ.)

10. Sletkov D. V., Khlebnikov V. V., Zubakov A. P. *Methods for calculating the fractal dimension of images.* Naukosfera. 2021; 3-2: 173–180. (In Russ.)

11. Mamatov E. U., Tashpolotov Y., Ibraimov T. K. The microrelief research (fractal properties) of the surface of crystals of basalt rocks of the Kyzyl-Kil deposit of KR. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Osh State University.* 2022; 1: 205–213. (In Russ.)

12. Feder J. *Fractals.* NY: Springer, 2013. Available from: doi: 10.1007/978-1-4899-2124-6

13. Potapov A. A. *Fractals in radiophysics and radar. Sample topology.* Moscow: Universitetskaia kniga Publishing; 2005. (In Russ.)

14. Sobol I. M. *Monte Carlo method.* Moscow: Nauka Publishing; 1978. (In Russ.)

15. Kheerman D. V. *Methods of computer experiment in theoretical physics.* Moscow: Nauka Publishing; 1990. (In Russ.)

16. Richard M. *Crownover. Introduction to fractals and chaos.* Boston: Jones and Bartlett Publishers, Inc., 1995.
17. Mandelbrot B. *The fractal geometry of nature.* New York: Echo Point Books & Media, LLC, 2021.

Received 29 August 2025

Information about the authors:

Vasilii V. Sokolov – PhD (Engineering), lead engineer, department of pit wall stability, Institute of Mining UB RAS. E-mail: lubk_igd@mail.ru; https://orcid.org/0009-0005-4356-154X
Vladimir V. Frants – PhD (Engineering), associate professor of the Department of Mine Construction, Ural State Mining University. E-mail: franc_vv@mail.ru; https://orcid.org/0000-0001-5786-684X
Aleksei V. Iakovlev – PhD (Engineering), head of the department of pit wall stability, Institute of Mining UB RAS. E-mail: lubk_igd@mail.ru

Для цитирования: Соколов В. В., Франц В. В., Яковлев А. В. Фрактальный анализ структуры поверхностей трещин // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. 2025. № 5. С. 48–57. DOI: 10.21440/0536-1028-2025-5-48-57
For citation: Sokolov V. V., Frants V. V., Iakovlev A. V. Fractal analysis of the fracture surface structure. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Gornyi zhurnal = Minerals and Mining Engineering*. 2025; 5: 48–57 (In Russ.). DOI: 10.21440/0536-1028-2025-5-48-57