

## ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ФАКТОРА НА ТОЧНОСТЬ СПУТНИКОВОГО ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ

ГОРДЕЕВ В. А., РАЕВА О. С.

*Рассмотрено влияние геометрии пространственной засечки – взаимного расположения в пространстве приемника и спутников, сигналы от которых принимаются приемником в момент измерения, – на точность позиционирования. В прямоугольной пространственной системе координат положение спутника описывается через геометрическую дальность, дирекционный угол и угол возвышения. Геометрический фактор выражен через диагональные элементы обратной весовой матрицы ошибок положения определяемого пункта. Исследовано изменение геометрического фактора для симметричных схем расположения спутников – при равномерном расположении по горизонту и на полусфере. Показано, что с возрастанием угла возвышения растет точность определения высотных отметок (снижается геометрический фактор  $VDOP$ ), и наоборот, падает точность определения плановых координат (растет  $HDOP$ ). В связи с этим предлагается при планировании маркшейдерских измерений на наблюдательных станциях и геополигонах ориентироваться не на  $PDOP$ , а раздельно на показатели  $VDOP$  и  $HDOP$ .*

*Ключевые слова:* спутниковое позиционирование; геометрический фактор; обратная весовая матрица; симметричное расположение спутников; погрешности положения пунктов;  $PDOP$ ;  $VDOP$ ;  $HDOP$ .

Наряду с традиционными методами создания маркшейдерских опорных и съемочных сетей в последние десятилетия широкое применение на карьерах нашли спутниковые геодезические технологии. В геодезическом смысле они реализуют принцип пространственной обратной линейной засечки, когда пространственные координаты ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) пункта наземной сети определяются по расстояниям, измеренным от этого пункта до четырех и более спутников, положение которых известно с достаточной точностью.

Основным достоинством спутниковых систем является их оперативность, всепогодность, оптимальная точность и эффективность. Для измерений не нужна видимость между определяемыми пунктами. Метод определения координат геодезических пунктов с помощью спутниковых систем называют *позиционированием*.

Точность позиционирования определяется применяемым оборудованием и методикой измерений, это указывается в паспорте прибора-приемника, а также геометрией засечки (спутниковой геометрией) – взаимным расположением в пространстве приемника и спутников, сигналы которых принима-

---

**Гордеев Виктор Александрович** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой маркшейдерского дела. 620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30, Уральский государственный горный университет. E-mail: Gordeev.V@ursmu.ru

**Раева Ольга Сергеевна** – кандидат технических наук, доцент кафедры маркшейдерского дела. 620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30, Уральский государственный горный университет. E-mail: raevaos@mail.ru

ются приемником в момент измерения. Поэтому будем различать два фактора, формирующих точность позиционирования: приборно-методический и геометрический.

Для исследования влияния геометрического фактора на точность позиционирования выразим в прямоугольной пространственной системе координат положение спутника  $x_s, y_s, z_s$  через дальность (геометрическую дальность)  $l$ , дирекционный угол  $\alpha$  и угол возвышения  $\delta$  (рис. 1). При этом начало системы координат поместим в определяемый пункт  $P$ .

Координаты спутника:

$$x_s = l \cos \delta \cos \alpha; \quad y_s = l \cos \delta \sin \alpha; \quad z_s = l \sin \delta.$$

Обозначим координаты определяемого пункта  $P$  через параметры:

$$X_P = T_1; \quad Y_P = T_2; \quad Z_P = T_3.$$

При наблюдении  $k$  спутников выразим измеренные величины (дальности) через координаты исходных пунктов (спутников) и параметры:

$$\begin{aligned} l_1 &= \sqrt{(T_1 - x_{S_1})^2 + (T_2 - y_{S_1})^2 + (T_3 - z_{S_1})^2}; \\ &\dots\dots\dots \\ l_k &= \sqrt{(T_1 - x_{S_k})^2 + (T_2 - y_{S_k})^2 + (T_3 - z_{S_k})^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Дифференцируя выражения (1) по параметрам, найдем элементы матрицы  $\mathbf{A}$  [1]:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\partial l_1}{\partial T_1} = \frac{(T_1 - x_{S_1})}{l_1} = \frac{l_1 \cos \alpha_1 \cos \delta_1}{l_1} = \cos \alpha_1 \cos \delta_1; \\ a_{12} &= \frac{\partial l_1}{\partial T_2} = \frac{(T_2 - y_{S_1})}{l_1} = \frac{l_1 \sin \alpha_1 \cos \delta_1}{l_1} = \sin \alpha_1 \cos \delta_1; \\ a_{13} &= \frac{\partial l_1}{\partial T_3} = \frac{(T_3 - z_{S_1})}{l_1} = \frac{l_1 \sin \delta_1}{l_1} = \sin \delta_1 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Матрица  $\mathbf{A}$  имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \cos \delta_1 & \sin \alpha_1 \cos \delta_1 & \sin \delta_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \cos \alpha_k \cos \delta_k & \sin \alpha_k \cos \delta_k & \sin \delta_k \end{pmatrix}.$$

Обратная весовая матрица координат определяемого пункта

$$\mathbf{Q}_P = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ & q_{22} & q_{23} \\ & & q_{33} \end{pmatrix}.$$

Диагональные элементы матрицы  $\mathbf{Q}_p$  используются для расчета ошибки положения пункта  $P$ :

$$\begin{aligned} \text{по высоте} & m_{Pz} = \mu\sqrt{q_{33}}; \\ \text{в плане} & m_{Px,y} = \mu\sqrt{q_{11} + q_{22}}; \\ \text{в пространстве} & m_{Px,y,z} = \mu\sqrt{q_{11} + q_{22} + q_{33}}, \end{aligned}$$

где  $\mu$  – ошибка единицы веса.

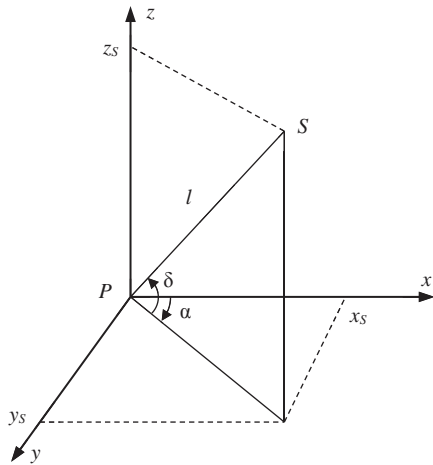


Рис. 1. Положение спутника в прямоугольной системе координат

Очевидно, чем меньшие значения принимают диагональные элементы матрицы  $\mathbf{Q}_p$ , тем точнее определяется положение пункта, тем точнее позиционирование.

Элементы матрицы  $\mathbf{Q}_p$  определяются только геометрией засечки. В теории анализа точности спутниковых геодезических измерений используется понятие геометрического фактора (ГФ) – отношение ошибки положения пункта к ошибке единицы веса [2]:

$$\Gamma\Phi = m_p/\mu.$$

В зависимости от вида ошибки положения (по высоте, в плане или в пространстве) геометрический фактор имеет следующие обозначения:

$$VDOP = \sqrt{q_{33}}; \quad HDOP = \sqrt{q_{11} + q_{22}}; \quad PDOP = \sqrt{q_{11} + q_{22} + q_{33}}. \quad (2)$$

Обозначения переводятся как снижение точности ( $DOP$ ) по высоте ( $V$ ), в плане ( $H$ ), в пространстве ( $P$ ). Иными словами, чем больше  $DOP$ , тем ниже точность позиционирования.

Из выражений (2) следует:

$$PDOP^2 = HDOP^2 + VDOP^2.$$

Примем для дальнейшего анализа равные расстояния до спутников, линейные измерения равноточными, а ошибка единицы веса  $\mu = m_l$ . Матрица веса  $\mathbf{P}$  – единичная.

Рассмотрим случай, когда  $k$  спутников в момент наблюдений расположились равномерно по горизонту, все – под углом возвышения  $\delta$ . В этом случае матрица  $\mathbf{Q}_p$  – диагональная:

$$\mathbf{Q}_p = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{k}{2} \cos^2 \delta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{2} \cos^2 \delta & 0 \\ 0 & 0 & k \sin^2 \delta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{k \cos^2 \delta} & & \\ & \frac{2}{k \cos^2 \delta} & \\ & & \frac{1}{k \sin^2 \delta} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Из формулы (3) следует, что точность позиционирования повышается в  $\sqrt{k}$  раз с увеличением числа спутников.

В табл. 1 приведены значения геометрического фактора при разных углах возвышения спутников над горизонтом и количестве спутников  $k = 5$ .

Таблица 1  
Влияние угла возвышения  $\delta$  на точность позиционирования (при  $k = 5$ )

ГФ	Угол возвышения спутников над горизонтом $\delta$							
	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
<i>PDOP</i>	2,73	1,62	1,37	1,36	1,51	1,86	2,66	5,17
<i>HDOP</i>	0,91	0,95	1,03	1,17	1,39	1,79	2,62	5,15
<i>VDOP</i>	2,58	1,31	0,89	0,70	0,58	0,52	0,48	0,45

Наибольший интерес для маркшейдеров представляет влияние расположения спутников на точность позиционирования в плане (*HDOP*) и по высоте (*VDOP*). Из данных табл. 1 следует, что с возрастанием угла возвышения растет точность определения высотных отметок (снижается *VDOP*) и падает точность определения плановых координат.

Таблица 2  
Значения геометрического фактора при  $k = 5$  (спутник в зените)

ГФ	Угол возвышения спутников над горизонтом $\delta$							
	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
<i>PDOP</i>	1,39	1,35	1,35	1,44	1,65	2,06	2,96	5,78
<i>HDOP</i>	1,02	1,06	1,15	1,31	1,56	2	2,92	5,76
<i>VDOP</i>	0,94	0,83	0,71	0,61	0,55	0,5	0,47	0,45

Рассмотрим случай, когда, как считается, обеспечивается наиболее точное позиционирование. Для этого сохраним равномерное по горизонту расположение  $(k - 1)$  спутников, а  $k$ -й спутник поместим в зенит, т. е.  $\alpha_k = 0$ ;  $\delta_k = 90^\circ$ .

Матрица  $\mathbf{A}$  примет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \cos \delta_1 & \sin \alpha_1 \cos \delta_1 & \sin \delta_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \cos \alpha_{k-1} \cos \delta_{k-1} & \sin \alpha_{k-1} \cos \delta_{k-1} & \sin \delta_{k-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае матрица  $\mathbf{Q}_p$  – также диагональная:

$$\mathbf{Q}_p = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{(k-1) \cos^2 \delta} & & \\ & \frac{2}{(k-1) \cos^2 \delta} & \\ & & \frac{1}{(k-1) \sin^2(\delta+1)} \end{pmatrix}.$$

Результаты расчета геометрического фактора приведены в табл. 2.

Сравнивая табл. 1 и табл. 2, замечаем, что при втором варианте размещения спутников происходит повышение точности позиционирования по высоте, особенно при острых углах возвышения, но точность определения плановых координат снижается в среднем на 10 %.

Рассмотрим третий случай – равномерного расположения спутников на полусфере. Для  $k = 5$  это будет вариант, когда два спутника ( $S_1$  и  $S_2$ ) расположены диаметрально по горизонту под углом возвышения  $\delta_1$ , один спутник ( $S_3$ ) – в зените ( $\delta_3 = 90^\circ$ ) и еще два спутника ( $S_3$  и  $S_4$ ) развернуты в плане относительно двух нижних на  $90^\circ$ , а их угол возвышения  $\delta_2 = (90^\circ + \delta_1)/2$  (рис. 2).

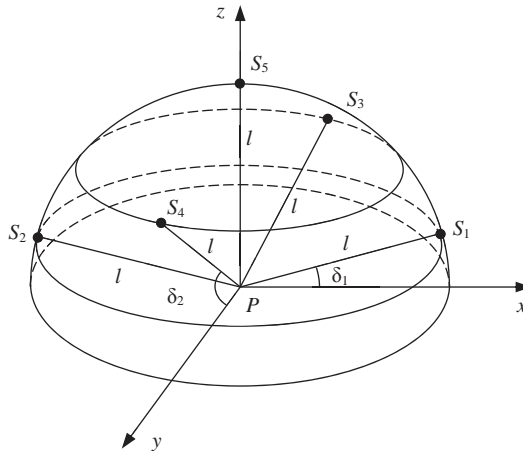


Рис. 2. Равномерное расположение пяти спутников на полусфере

И в этом симметричном случае матрица  $\mathbf{Q}_p$  – диагональная, значения ее элементов зависят только от угла возвышения спутников  $S_1$  и  $S_2$ . В табл. 3 приведены значения геометрического фактора при разных углах возвышения спутников над горизонтом.

Из данных табл. 3 следует, что равномерное расположение спутников на полусфере обеспечивает еще более высокую точность позиционирования по высоте.

Расположение спутников относительно определяемого пункта наглядно прослеживается на плоских диаграммах. На рис. 3 приведены диаграммы для всех трех рассмотренных в статье вариантов.

Таблица 3

Значения геометрического фактора при равномерном расположении спутников на полусфере

ГФ	Угол возвышения спутников над горизонтом $\delta_1$							
	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
<i>PDOP</i>	1,47	1,57	1,73	1,98	2,40	3,11	4,59	9,09
<i>HDOP</i>	1,31	1,44	1,63	1,91	2,34	3,08	4,57	9,08
<i>VDOP</i>	0,67	0,62	0,58	0,54	0,50	0,48	0,46	0,45

Из таблиц следует, что хорошие результаты получаются при небольших углах возвышения спутников – от  $10^\circ$  до  $30^\circ$ . Поэтому пользователи спутниковых систем позиционирования (ССП) устанавливают ограничение (маску по возвышению) в пределах  $10^\circ$ – $15^\circ$ . Вообще геометрический фактор зависит также от ширины местности, количества наблюдаемых спутников и других факторов.

ГФ становится меньше при наличии более четырех спутников, достаточно хорошим считается наличие шести спутников [2].

Программное обеспечение ССП позволяет по известному расположению спутников основных группировок GPS и ГЛОНАСС рассчитать для конкретного местоположения приемника наиболее благоприятное время наблюдений. При этом основным показателем ГФ является  $PDOP$ . Для вербальной оценки качества засечки пользуются следующей шкалой:  $PDOP < 4$  – «хорошо»;  $PDOP = 5-7$  – «удовлетворительно»;  $PDOP > 7$  – «плохо».

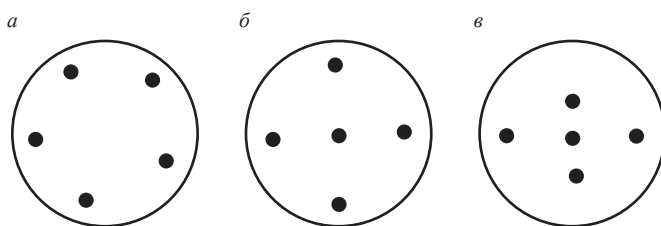


Рис. 3. Плоские диаграммы расположения пяти спутников:  
 а – равномерное распределение по горизонту; б – спутник в зените;  
 в – равномерное распределение на полусфере

Однако, как указывалось ранее, при планировании маркшейдерских измерений необходимо ориентироваться не на  $PDOP$ , а отдельно на показатели  $VDOP$  и  $HDOP$ , которые формируются антагонистично, в противовес друг другу. Очевидно, что оптимальные по точности периоды наблюдений в высотных сетях и плановых построениях не будут совпадать. Это следует учитывать при наблюдениях за деформациями горнотехнических сооружений и земной поверхности под влиянием горных разработок на геополгонах и маркшейдерских наблюдательных станциях.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гордеев В. А. Теория ошибок измерений и уравнительные вычисления: учеб. пособие. Екатеринбург: УГГУ, 2004. 429 с.
2. Серапинас Б. Б. Глобальные системы позиционирования. М.: Каталог, 2002. 106 с.

Поступила в редакцию 22 января 2018 года

#### THE INFLUENCE OF GEOMETRIC FACTOR ON THE ACCURACY OF SATELLITE POSITIONING

Gordeev V. A., Raeva O. S. – The Ural State Mining University, Ekaterinburg, the Russian Federation.  
 E-mail: Gordeev.V@ursmu.ru

The article examines the influence of the geometry of spatial intersection – mutual spatial arrangement of a transmitter and satellites, whose signals are received by a transmitter in the moment of measuring – on the accuracy of positioning. In rectangular spatial coordinate system the position of a satellite is described through the geometric remoteness, grid azimuths, and the angle of elevation. Geometric factor is expressed through the diagonal elements of the determined point position inverse weight error matrix. The article investigates the alternation of the geometric factor for satellite symmetric allocation schemes – under the uniform spacing along the horizon and on the hemisphere. It has been shown that with the increase of the angle of elevation, the accuracy of elevation points determination increases ( $VDOP$  geometric factor descends), and on the contrary, the accuracy of determining the planned coordinates reduces ( $HDOP$  increases). In this regard, when planning surveying measurements on the observation stations and geodetic polygons, it is suggested to focus not on  $PDOP$ , but on the indices of  $VDOP$  and  $HDOP$  separately.

**Key words:** satellite positioning; geometric factor; inverse weight matrix; satellites symmetric allocation; points allocation errors;  $PDOP$ ;  $VDOP$ ;  $HDOP$ .

#### REFERENCES

1. Gordeev V. A. *Teoriia oshibok izmerenii i uravnitel'nye vychisleniia: ucheb. posobie* [School book “The theory of measurement errors and compensation computations”]. Ekaterinburg, UrSMU Publ., 2004. 429 p.
2. Serepinas B. B. *Global'nye sistemy pozitsionirovaniia* [Global positioning systems]. Moscow, Katalog Publ., 2002. 106 p.